

Aspetti particolari dell'applicazione della statistica all'elaborazione dei dati delle esercitazioni di laboratorio

Considerazioni di carattere generale sulle calibrazioni (esercitazioni 1a, 3, 5 e 7)

Ogniquale volta si effettua una **calibrazione** è obbligatorio procedere nel modo seguente:

- 1) riportare in **tabella** tutti i dati acquisiti, **senza mediare i replicati ottenuti ad una certa concentrazione**
- 2) determinare e riportare **l'equazione della retta di calibrazione**
- 3) calcolare e riportare **gli intervalli di fiducia per l'intercetta e la pendenza della retta e il valore della deviazione standard sui residui ($s_{y/x}$)**
- 4) calcolare i **valori del LOD con le due equazioni mostrate a lezione**
- 5) **estrapolare le concentrazioni del campione incognito o del campione reale**
- 6) **valutare se le concentrazioni estrapolate siano superiori ad entrambi i valori del LOD e soltanto in tal caso procedere al calcolo del loro intervallo di fiducia.**

1b. Titolazione spettrofotometrica del rame

L'equazione del volume aggiunto al punto equivalente è:

$$V_{pe} = \frac{a' - a''}{b'' - b'}$$

dove a' e a'' sono le intercette, mentre b' e b'' sono le pendenze delle rette di interpolazione dei due tratti lineari delle curve di titolazione.

Ciascuno di tali parametri sarà caratterizzato da una deviazione standard, fornita dal metodo dei minimi quadrati.

La **deviazione standard sul volume al punto equivalente** sarà ottenuta applicando la **legge della propagazione dell'errore**:

$$\begin{aligned} s_{V_{pe}} &= \sqrt{s_{a'}^2 \left(\frac{\partial V_{pe}}{\partial a'} \right)^2 + s_{b'}^2 \left(\frac{\partial V_{pe}}{\partial b'} \right)^2 + s_{a''}^2 \left(\frac{\partial V_{pe}}{\partial a''} \right)^2 + s_{b''}^2 \left(\frac{\partial V_{pe}}{\partial b''} \right)^2 =} \\ &= \sqrt{s_{a'}^2 \left(\frac{1}{b'' - b'} \right)^2 + s_{b'}^2 \left(\frac{(a' - a'')}{(b'' - b')^2} \right)^2 + s_{a''}^2 \left(\frac{-1}{b'' - b'} \right)^2 + s_{b''}^2 \left(\frac{(a' - a'')}{(b'' - b')^2} \right)^2} \end{aligned}$$

Nota: è possibile che le deviazioni standard dei parametri di regressione del tratto finale, a'' e b'' , siano estremamente piccole. In tal caso è possibile trascurare i termini che contengono quelle deviazioni standard nella formula della deviazione standard sul volume equivalente.

Detti:

c_s la concentrazione di Cu(II) da determinare;

V_s il volume di soluzione di Cu(II) da titolare (poi diluito a V_0 con H_2O e con soluzione tampone a pH 10);

c_{EDTA} la concentrazione di EDTA usata per la titolazione, risulterà:

$$c_s = \frac{c_{EDTA} \times V_{pe}}{V_s}$$

Si potrà calcolare la deviazione standard su c_s , s_{c_s} , applicando la legge della propagazione degli errori e considerando che sia la concentrazione di EDTA sia il volume di soluzione da titolare siano noti con incertezza trascurabile, quindi:

$$s_{c_s} = (c_{\text{EDTA}} / V_s) \times s_{V_{pe}}$$

L'intervallo di fiducia su c_s al 95% si può calcolare considerando la relazione (s_{c_s} , derivando da $s_{V_{pe}}$, tiene già conto dei gradi di libertà associati alla combinazione delle due regressioni lineari effettuate):

$$c_s \pm t_{n,0.975} \times s_{c_s}$$

dove $n = n_1 + n_2 - 4$

con:

n_1 = numero di punti del primo tratto della curva di titolazione

n_2 = numero di punti del secondo tratto della curva di titolazione

Il termine $- 4$ nell'espressione di n tiene conto del fatto che sono coinvolte due rette di regressione e quindi 4 parametri in tutto.

4. Concentrazione di sodio e potassio in acque potabili (commerciali o di acquedotto) mediante spettroscopia atomica di emissione in fiamma: esercizio di applicazione del test di Kolmogorov

I calcoli verranno effettuati sui dati di sodio e potassio suddivisi in tre gruppi:

Gruppo di dati 1

Gruppo di dati 2

Gruppo di dati 3 = unificazione dei gruppi 1 e 2

Elaborazioni da eseguire sia per il sodio che per il potassio:

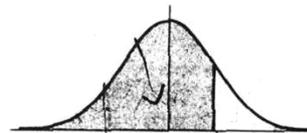
- ✓ calcolo della **media e della deviazione standard campionaria** per i dati del gruppo 1, del gruppo 2 e del gruppo 3 relativi a ciascun analita
- ✓ verifica della presenza di eventuali dati aberranti mediante il **Q-test**
- ✓ trasformazione dei dati dei tre gruppi in valori della variabile random standard z e **verifica della presenza di una distribuzione normale mediante il test di Kolmogorov a due code** per ciascuno dei gruppi di dati

- ✓ **applicazione dell'F-test** per confrontare le varianze campionarie dei dati dei Gruppi 1 e 2

ATTENZIONE: l'F-test potrà, a rigore, essere applicato **SOLO SE** entrambe le popolazioni a cui si fa riferimento siano distribuite normalmente. Tuttavia, si potrà scegliere di procedere comunque con il test, ipotizzando che esso possa fornire un esito affidabile grazie alla robustezza dei test che si basano sulla normalità. Tale precisazione **DEVE** essere riportata nella relazione **PRIMA** di procedere all'applicazione del test.

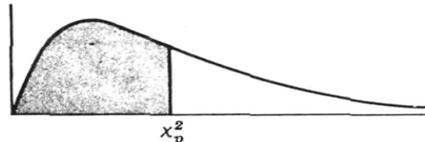
- ✓ in base al risultato dell'F-test sulle varianze, **applicazione di uno dei metodi per il confronto delle medie basato sull'intervallo di fiducia** (caso 3 o caso 4, a seconda dell'esito dell'F-test) per stabilire se i valori medi delle concentrazioni di sodio e potassio nei Gruppi 1 e 2 differiscano significativamente fra di loro.

VALORI DEI PERCENTILI (t_p)
per la
DISTRIBUZIONE DELLA VARIABILE
CASUALE t DI STUDENT
con ν gradi di libert 
(area ombreggiata = p)



| ν | $t_{0,995}$ | $t_{0,99}$ | $t_{0,975}$ | $t_{0,95}$ | $t_{0,90}$ | $t_{0,80}$ | $t_{0,75}$ | $t_{0,70}$ | $t_{0,60}$ | $t_{0,55}$ |
|----------|-------------|------------|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 63,66 | 31,82 | 12,71 | 6,31 | 3,08 | 1,376 | 1,000 | 0,727 | 0,325 | 0,158 |
| 2 | 9,92 | 6,96 | 4,30 | 2,92 | 1,89 | 1,061 | 0,816 | 0,617 | 0,289 | 0,142 |
| 3 | 5,84 | 4,54 | 3,18 | 2,35 | 1,64 | 0,978 | 0,765 | 0,584 | 0,277 | 0,137 |
| 4 | 4,60 | 3,75 | 2,78 | 2,13 | 1,53 | 0,941 | 0,741 | 0,569 | 0,271 | 0,134 |
| 5 | 4,03 | 3,36 | 2,57 | 2,02 | 1,48 | 0,920 | 0,727 | 0,559 | 0,267 | 0,132 |
| 6 | 3,71 | 3,14 | 2,45 | 1,94 | 1,44 | 0,906 | 0,718 | 0,553 | 0,265 | 0,131 |
| 7 | 3,50 | 3,00 | 2,36 | 1,90 | 1,42 | 0,896 | 0,711 | 0,549 | 0,263 | 0,130 |
| 8 | 3,36 | 2,90 | 2,31 | 1,86 | 1,40 | 0,889 | 0,706 | 0,546 | 0,262 | 0,130 |
| 9 | 3,25 | 2,82 | 2,26 | 1,83 | 1,38 | 0,883 | 0,703 | 0,543 | 0,261 | 0,129 |
| 10 | 3,17 | 2,76 | 2,23 | 1,81 | 1,37 | 0,879 | 0,700 | 0,542 | 0,260 | 0,129 |
| 11 | 3,11 | 2,72 | 2,20 | 1,80 | 1,36 | 0,876 | 0,697 | 0,540 | 0,260 | 0,129 |
| 12 | 3,06 | 2,68 | 2,18 | 1,78 | 1,36 | 0,873 | 0,695 | 0,539 | 0,259 | 0,128 |
| 13 | 3,01 | 2,65 | 2,16 | 1,77 | 1,35 | 0,870 | 0,694 | 0,538 | 0,259 | 0,128 |
| 14 | 2,98 | 2,62 | 2,14 | 1,76 | 1,34 | 0,868 | 0,692 | 0,537 | 0,258 | 0,128 |
| 15 | 2,95 | 2,60 | 2,13 | 1,75 | 1,34 | 0,866 | 0,691 | 0,536 | 0,258 | 0,128 |
| 16 | 2,92 | 2,58 | 2,12 | 1,75 | 1,34 | 0,865 | 0,690 | 0,535 | 0,258 | 0,128 |
| 17 | 2,90 | 2,57 | 2,11 | 1,74 | 1,33 | 0,863 | 0,689 | 0,534 | 0,257 | 0,128 |
| 18 | 2,88 | 2,55 | 2,10 | 1,73 | 1,33 | 0,862 | 0,688 | 0,534 | 0,257 | 0,127 |
| 19 | 2,86 | 2,54 | 2,09 | 1,73 | 1,33 | 0,861 | 0,688 | 0,533 | 0,257 | 0,127 |
| 20 | 2,84 | 2,53 | 2,09 | 1,72 | 1,32 | 0,860 | 0,687 | 0,533 | 0,257 | 0,127 |
| 21 | 2,83 | 2,52 | 2,08 | 1,72 | 1,32 | 0,859 | 0,686 | 0,532 | 0,257 | 0,127 |
| 22 | 2,82 | 2,51 | 2,07 | 1,72 | 1,32 | 0,858 | 0,686 | 0,532 | 0,256 | 0,127 |
| 23 | 2,81 | 2,50 | 2,07 | 1,71 | 1,32 | 0,858 | 0,685 | 0,532 | 0,256 | 0,127 |
| 24 | 2,80 | 2,49 | 2,06 | 1,71 | 1,32 | 0,857 | 0,685 | 0,531 | 0,256 | 0,127 |
| 25 | 2,79 | 2,48 | 2,06 | 1,71 | 1,32 | 0,856 | 0,684 | 0,531 | 0,256 | 0,127 |
| 26 | 2,78 | 2,48 | 2,06 | 1,71 | 1,32 | 0,856 | 0,684 | 0,531 | 0,256 | 0,127 |
| 27 | 2,77 | 2,47 | 2,05 | 1,70 | 1,31 | 0,855 | 0,684 | 0,531 | 0,256 | 0,127 |
| 28 | 2,76 | 2,47 | 2,05 | 1,70 | 1,31 | 0,855 | 0,683 | 0,530 | 0,256 | 0,127 |
| 29 | 2,76 | 2,46 | 2,04 | 1,70 | 1,31 | 0,854 | 0,683 | 0,530 | 0,256 | 0,127 |
| 30 | 2,75 | 2,46 | 2,04 | 1,70 | 1,31 | 0,854 | 0,683 | 0,530 | 0,256 | 0,127 |
| 40 | 2,70 | 2,42 | 2,02 | 1,68 | 1,30 | 0,851 | 0,681 | 0,529 | 0,255 | 0,126 |
| 60 | 2,66 | 2,39 | 2,00 | 1,67 | 1,30 | 0,848 | 0,679 | 0,527 | 0,254 | 0,126 |
| 120 | 2,62 | 2,36 | 1,98 | 1,66 | 1,29 | 0,845 | 0,677 | 0,526 | 0,254 | 0,126 |
| ∞ | 2,58 | 2,33 | 1,96 | 1,645 | 1,28 | 0,842 | 0,674 | 0,524 | 0,253 | 0,126 |

VALORI DEI PERCENTILI
per la
DISTRIBUZIONE DELLA VARIABILE
CASUALE CHI-QUADRATO
con ν gradi di libertà
(area ombreggiata = p)



| ν | $\chi_{0,995}^2$ | $\chi_{0,99}^2$ | $\chi_{0,975}^2$ | $\chi_{0,95}^2$ | $\chi_{0,90}^2$ | $\chi_{0,75}^2$ | $\chi_{0,50}^2$ | $\chi_{0,25}^2$ | $\chi_{0,10}^2$ | $\chi_{0,05}^2$ | $\chi_{0,025}^2$ | $\chi_{0,01}^2$ | $\chi_{0,005}^2$ |
|-------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|
| 1 | 7,88 | 6,63 | 5,02 | 3,84 | 2,71 | 1,32 | 0,455 | 0,102 | 0,0158 | 0,0039 | 0,0010 | 0,0002 | 0,0000 |
| 2 | 10,6 | 9,21 | 7,38 | 5,99 | 4,61 | 2,77 | 1,39 | 0,575 | 0,211 | 0,103 | 0,0506 | 0,0201 | 0,0100 |
| 3 | 12,8 | 11,3 | 9,35 | 7,81 | 6,25 | 4,11 | 2,37 | 1,21 | 0,584 | 0,352 | 0,216 | 0,115 | 0,072 |
| 4 | 14,9 | 13,3 | 11,1 | 9,49 | 7,78 | 5,39 | 3,36 | 1,92 | 1,06 | 0,711 | 0,484 | 0,297 | 0,207 |
| 5 | 16,7 | 15,1 | 12,8 | 11,1 | 9,24 | 6,63 | 4,35 | 2,67 | 1,61 | 1,15 | 0,831 | 0,554 | 0,412 |
| 6 | 18,5 | 16,8 | 14,4 | 12,6 | 10,6 | 7,34 | 5,35 | 3,45 | 2,20 | 1,64 | 1,24 | 0,872 | 0,676 |
| 7 | 20,3 | 18,5 | 16,0 | 14,1 | 12,0 | 9,04 | 6,35 | 4,25 | 2,83 | 2,17 | 1,69 | 1,24 | 0,989 |
| 8 | 22,0 | 20,1 | 17,5 | 15,5 | 13,4 | 10,2 | 7,34 | 5,07 | 3,49 | 2,73 | 2,18 | 1,65 | 1,34 |
| 9 | 23,6 | 21,7 | 19,0 | 16,9 | 14,7 | 11,4 | 8,34 | 5,90 | 4,17 | 3,33 | 2,70 | 2,09 | 1,73 |
| 10 | 25,2 | 23,2 | 20,5 | 18,3 | 16,0 | 12,5 | 9,34 | 6,74 | 4,87 | 3,94 | 3,25 | 2,56 | 2,16 |
| 11 | 26,8 | 24,7 | 21,9 | 19,7 | 17,3 | 13,7 | 10,3 | 7,58 | 5,58 | 4,57 | 3,82 | 3,05 | 2,60 |
| 12 | 28,3 | 26,2 | 23,3 | 21,0 | 18,5 | 14,8 | 11,3 | 8,44 | 6,30 | 5,23 | 4,40 | 3,57 | 3,07 |
| 13 | 29,8 | 27,7 | 24,7 | 22,4 | 19,8 | 16,0 | 12,3 | 9,30 | 7,04 | 5,89 | 5,01 | 4,11 | 3,57 |
| 14 | 31,3 | 29,1 | 26,1 | 23,7 | 21,1 | 17,1 | 13,3 | 10,2 | 7,79 | 6,57 | 5,63 | 4,66 | 4,07 |
| 15 | 32,8 | 30,6 | 27,5 | 25,0 | 22,3 | 18,2 | 14,3 | 11,0 | 8,55 | 7,26 | 6,26 | 5,23 | 4,60 |
| 16 | 34,3 | 32,0 | 28,8 | 26,3 | 23,5 | 19,4 | 15,3 | 11,9 | 9,31 | 7,96 | 6,91 | 5,81 | 5,14 |
| 17 | 35,7 | 33,4 | 30,2 | 27,6 | 24,8 | 20,5 | 16,3 | 12,8 | 10,1 | 8,67 | 7,56 | 6,41 | 5,70 |
| 18 | 37,2 | 34,8 | 31,5 | 28,9 | 26,0 | 21,6 | 17,3 | 13,7 | 10,9 | 9,39 | 8,23 | 7,01 | 6,26 |
| 19 | 38,6 | 36,2 | 32,9 | 30,1 | 27,2 | 22,7 | 18,3 | 14,6 | 11,7 | 10,1 | 8,91 | 7,63 | 6,84 |
| 20 | 40,0 | 37,6 | 34,2 | 31,4 | 28,4 | 23,8 | 19,3 | 15,5 | 12,4 | 10,9 | 9,59 | 8,26 | 7,43 |
| 21 | 41,4 | 38,9 | 35,5 | 32,7 | 29,6 | 24,9 | 20,3 | 16,3 | 13,2 | 11,6 | 10,3 | 8,90 | 8,03 |
| 22 | 42,8 | 40,3 | 36,8 | 33,9 | 30,8 | 26,0 | 21,3 | 17,2 | 14,0 | 12,3 | 11,0 | 9,54 | 8,64 |
| 23 | 44,2 | 41,6 | 38,1 | 35,2 | 32,0 | 27,1 | 22,3 | 18,1 | 14,8 | 13,1 | 11,7 | 10,2 | 9,26 |
| 24 | 45,6 | 43,0 | 39,4 | 36,4 | 33,2 | 28,2 | 23,3 | 19,0 | 15,7 | 13,8 | 12,4 | 10,9 | 9,89 |
| 25 | 46,9 | 44,3 | 40,6 | 37,7 | 34,4 | 29,3 | 24,3 | 19,9 | 16,5 | 14,6 | 13,1 | 11,5 | 10,5 |
| 26 | 48,3 | 45,6 | 41,9 | 38,9 | 35,6 | 30,4 | 25,3 | 20,8 | 17,3 | 15,4 | 13,8 | 12,2 | 11,2 |
| 27 | 49,6 | 47,0 | 43,2 | 40,1 | 36,7 | 31,5 | 26,3 | 21,7 | 18,1 | 16,2 | 14,6 | 12,9 | 11,8 |
| 28 | 51,0 | 48,3 | 44,5 | 41,3 | 37,9 | 32,6 | 27,3 | 22,7 | 18,9 | 16,9 | 15,3 | 13,6 | 12,5 |
| 29 | 52,3 | 49,6 | 45,7 | 42,6 | 39,1 | 33,7 | 28,3 | 23,6 | 19,8 | 17,7 | 16,0 | 14,3 | 13,1 |
| 30 | 53,7 | 50,9 | 47,0 | 43,8 | 40,3 | 34,8 | 29,3 | 24,5 | 20,6 | 18,5 | 16,8 | 15,0 | 13,8 |
| 40 | 66,8 | 63,7 | 59,3 | 55,8 | 51,8 | 45,6 | 39,3 | 33,7 | 29,1 | 26,5 | 24,4 | 22,2 | 20,7 |
| 50 | 79,5 | 76,2 | 71,4 | 67,5 | 63,2 | 56,3 | 49,3 | 42,9 | 37,7 | 34,8 | 32,4 | 29,7 | 28,0 |
| 60 | 92,0 | 88,4 | 83,3 | 79,1 | 74,4 | 67,0 | 59,3 | 52,3 | 46,5 | 43,2 | 40,5 | 37,5 | 35,5 |
| 70 | 104,2 | 100,4 | 95,0 | 90,5 | 85,5 | 77,6 | 69,3 | 61,7 | 55,3 | 51,7 | 48,8 | 45,4 | 43,3 |
| 80 | 116,3 | 112,3 | 106,6 | 101,9 | 96,6 | 88,1 | 79,3 | 71,1 | 64,3 | 60,4 | 57,2 | 53,5 | 51,2 |
| 90 | 128,3 | 124,1 | 118,1 | 113,1 | 107,6 | 98,6 | 89,3 | 80,6 | 73,3 | 69,1 | 65,6 | 61,8 | 59,2 |
| 100 | 140,2 | 135,8 | 129,6 | 124,3 | 118,5 | 109,1 | 99,3 | 90,1 | 82,4 | 77,9 | 74,2 | 70,1 | 67,3 |

Table A.2 – Critical values of F for a one-tailed test ($P = 0.05$)

| ν_1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ν_2 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 161.4 | 199.5 | 215.7 | 224.6 | 230.2 | 234.0 | 236.8 | 238.9 | 240.5 | 241.9 | 243.9 | 245.9 | 248.0 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 |
| 3 | 10.13 | 9.552 | 9.277 | 9.117 | 9.013 | 8.941 | 8.887 | 8.845 | 8.812 | 8.786 | 8.745 | 8.703 | 8.660 |
| 4 | 7.709 | 6.944 | 6.591 | 6.388 | 6.256 | 6.163 | 6.094 | 6.041 | 5.999 | 5.964 | 5.912 | 5.858 | 5.803 |
| 5 | 6.608 | 5.786 | 5.409 | 5.192 | 5.050 | 4.950 | 4.876 | 4.818 | 4.772 | 4.735 | 4.678 | 4.619 | 4.558 |
| 6 | 5.987 | 5.143 | 4.757 | 4.534 | 4.387 | 4.284 | 4.207 | 4.147 | 4.099 | 4.060 | 4.000 | 3.938 | 3.874 |
| 7 | 5.591 | 4.737 | 4.347 | 4.120 | 3.972 | 3.866 | 3.787 | 3.726 | 3.677 | 3.637 | 3.575 | 3.511 | 3.445 |
| 8 | 5.318 | 4.459 | 4.066 | 3.838 | 3.687 | 3.581 | 3.500 | 3.438 | 3.388 | 3.347 | 3.284 | 3.218 | 3.150 |
| 9 | 5.117 | 4.256 | 3.863 | 3.633 | 3.482 | 3.374 | 3.293 | 3.230 | 3.179 | 3.137 | 3.073 | 3.006 | 2.936 |
| 10 | 4.965 | 4.103 | 3.708 | 3.478 | 3.326 | 3.217 | 3.135 | 3.072 | 3.020 | 2.978 | 2.913 | 2.845 | 2.774 |
| 11 | 4.844 | 3.982 | 3.587 | 3.357 | 3.204 | 3.095 | 3.012 | 2.948 | 2.896 | 2.854 | 2.788 | 2.719 | 2.646 |
| 12 | 4.747 | 3.885 | 3.490 | 3.259 | 3.106 | 2.996 | 2.913 | 2.849 | 2.796 | 2.753 | 2.687 | 2.617 | 2.544 |
| 13 | 4.667 | 3.806 | 3.411 | 3.179 | 3.025 | 2.915 | 2.832 | 2.767 | 2.714 | 2.671 | 2.604 | 2.533 | 2.459 |
| 14 | 4.600 | 3.739 | 3.344 | 3.112 | 2.958 | 2.848 | 2.764 | 2.699 | 2.646 | 2.602 | 2.534 | 2.463 | 2.388 |
| 15 | 4.543 | 3.682 | 3.287 | 3.056 | 2.901 | 2.790 | 2.707 | 2.641 | 2.588 | 2.544 | 2.475 | 2.403 | 2.328 |
| 16 | 4.494 | 3.634 | 3.239 | 3.007 | 2.852 | 2.741 | 2.657 | 2.591 | 2.538 | 2.494 | 2.425 | 2.352 | 2.276 |
| 17 | 4.451 | 3.592 | 3.197 | 2.965 | 2.810 | 2.699 | 2.614 | 2.548 | 2.494 | 2.450 | 2.381 | 2.308 | 2.230 |
| 18 | 4.414 | 3.555 | 3.160 | 2.928 | 2.773 | 2.661 | 2.577 | 2.510 | 2.456 | 2.412 | 2.342 | 2.269 | 2.191 |
| 19 | 4.381 | 3.522 | 3.127 | 2.895 | 2.740 | 2.628 | 2.544 | 2.477 | 2.423 | 2.378 | 2.308 | 2.234 | 2.155 |
| 20 | 4.351 | 3.493 | 3.098 | 2.866 | 2.711 | 2.599 | 2.514 | 2.447 | 2.393 | 2.348 | 2.278 | 2.203 | 2.124 |

ν_1 = number of degrees of freedom of the numerator and ν_2 = number of degrees of freedom of the denominator.

Table A.3 – Critical values of F for a two-tailed test ($P = 0.05$)

| ν_1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ν_2 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 647.8 | 799.5 | 864.2 | 899.6 | 921.8 | 937.1 | 948.2 | 956.7 | 963.3 | 968.6 | 976.7 | 984.9 | 993.1 |
| 2 | 38.51 | 39.00 | 39.17 | 39.25 | 39.30 | 39.33 | 39.36 | 39.37 | 39.39 | 39.40 | 39.41 | 39.43 | 39.45 |
| 3 | 17.44 | 16.04 | 15.44 | 15.10 | 14.88 | 14.73 | 14.62 | 14.54 | 14.47 | 14.42 | 14.34 | 14.25 | 14.17 |
| 4 | 12.22 | 10.65 | 9.979 | 9.605 | 9.364 | 9.197 | 9.074 | 8.980 | 8.905 | 8.844 | 8.751 | 8.657 | 8.560 |
| 5 | 10.01 | 8.434 | 7.764 | 7.388 | 7.146 | 6.978 | 6.853 | 6.757 | 6.681 | 6.619 | 6.525 | 6.428 | 6.329 |
| 6 | 8.813 | 7.260 | 6.599 | 6.227 | 5.988 | 5.820 | 5.695 | 5.600 | 5.523 | 5.461 | 5.366 | 5.269 | 5.168 |
| 7 | 8.073 | 6.542 | 5.890 | 5.523 | 5.285 | 5.119 | 4.995 | 4.899 | 4.823 | 4.761 | 4.666 | 4.568 | 4.467 |
| 8 | 7.571 | 6.059 | 5.416 | 5.053 | 4.817 | 4.652 | 4.529 | 4.433 | 4.357 | 4.295 | 4.200 | 4.101 | 3.999 |
| 9 | 7.209 | 5.715 | 5.078 | 4.718 | 4.484 | 4.320 | 4.197 | 4.102 | 4.026 | 3.964 | 3.868 | 3.769 | 3.667 |
| 10 | 6.937 | 5.456 | 4.826 | 4.468 | 4.236 | 4.072 | 3.950 | 3.855 | 3.779 | 3.717 | 3.621 | 3.522 | 3.419 |
| 11 | 6.724 | 5.256 | 4.630 | 4.275 | 4.044 | 3.881 | 3.759 | 3.664 | 3.588 | 3.526 | 3.430 | 3.330 | 3.226 |
| 12 | 6.554 | 5.096 | 4.474 | 4.121 | 3.891 | 3.728 | 3.607 | 3.512 | 3.436 | 3.374 | 3.277 | 3.177 | 3.073 |
| 13 | 6.414 | 4.965 | 4.347 | 3.996 | 3.767 | 3.604 | 3.483 | 3.388 | 3.312 | 3.250 | 3.153 | 3.053 | 2.948 |
| 14 | 6.298 | 4.857 | 4.242 | 3.892 | 3.663 | 3.501 | 3.380 | 3.285 | 3.209 | 3.147 | 3.050 | 2.949 | 2.844 |
| 15 | 6.200 | 4.765 | 4.153 | 3.804 | 3.576 | 3.415 | 3.293 | 3.199 | 3.123 | 3.060 | 2.963 | 2.862 | 2.756 |
| 16 | 6.115 | 4.687 | 4.077 | 3.729 | 3.502 | 3.341 | 3.219 | 3.125 | 3.049 | 2.986 | 2.889 | 2.788 | 2.681 |
| 17 | 6.042 | 4.619 | 4.011 | 3.665 | 3.438 | 3.277 | 3.156 | 3.061 | 2.985 | 2.922 | 2.825 | 2.723 | 2.616 |
| 18 | 5.978 | 4.560 | 3.954 | 3.608 | 3.382 | 3.221 | 3.100 | 3.005 | 2.929 | 2.866 | 2.769 | 2.667 | 2.559 |
| 19 | 5.922 | 4.508 | 3.903 | 3.559 | 3.333 | 3.172 | 3.051 | 2.956 | 2.880 | 2.817 | 2.720 | 2.617 | 2.509 |
| 20 | 5.871 | 4.461 | 3.859 | 3.515 | 3.289 | 3.128 | 3.007 | 2.913 | 2.837 | 2.774 | 2.676 | 2.573 | 2.464 |

ν_1 = number of degrees of freedom of the numerator and ν_2 = number of degrees of freedom of the denominator.

Table A.16 – The Kolmogorov test for normality

Critical values for one-tailed and two-tailed tests at $P = 0.05$. The appropriate value is compared with the maximum difference between the experimental and theoretical cumulative frequency curves, as described in the text.

| n | One-tailed test | Two-tailed test |
|-----|-----------------|-----------------|
| 3 | 0.367 | 0.376 |
| 4 | 0.345 | 0.375 |
| 5 | 0.319 | 0.343 |
| 6 | 0.297 | 0.323 |
| 7 | 0.280 | 0.304 |
| 8 | 0.265 | 0.288 |
| 9 | 0.252 | 0.274 |
| 10 | 0.241 | 0.262 |
| 11 | 0.231 | 0.251 |
| 12 | 0.222 | 0.242 |
| 13 | 0.215 | 0.234 |
| 14 | 0.208 | 0.226 |
| 15 | 0.201 | 0.219 |
| 16 | 0.195 | 0.213 |
| 17 | 0.190 | 0.207 |
| 18 | 0.185 | 0.202 |
| 19 | 0.181 | 0.197 |
| 20 | 0.176 | 0.192 |